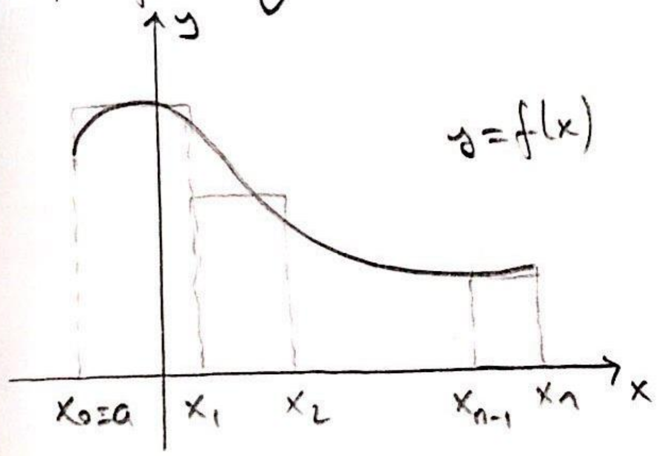
Belirli integral yardımıyla alan hesabı

1) f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında pozitif ve sürekli olsun.



$x_0=a$, $x_n=b$, x ekseni ve $y=f(x)$ fonksiyonu ile sınırlı bölgenin A alanını hesaplayalım:

$[a,b]$ aralığının bir düzgün bölünüşü

$$P=\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$$

olsun.

Şekildeki dikdörtgenlerin alanları toplamı A nın yaklaşık değerini verir. $c_1 \in [x_0, x_1]$, $c_2 \in [x_1, x_2]$, ..., $c_n \in [x_{n-1}, x_n]$ olmak üzere dikdörtgenlerin alanları toplamı

$$f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \dots + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k$$

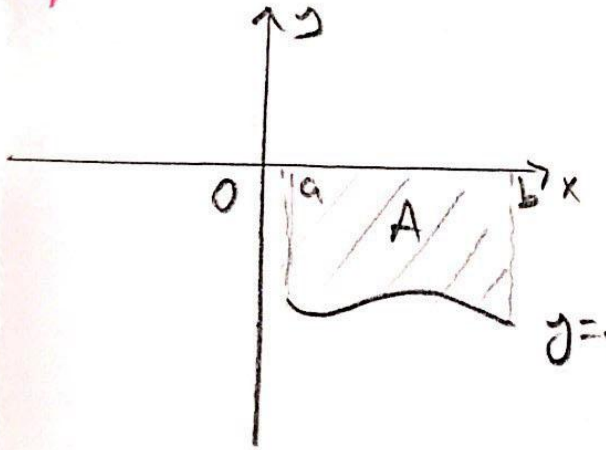
dir. Bu toplam bir Riemann toplamıdır ve

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k = \int_a^b f(x)\,dx$$

dir.

2) Her $x \in [a,b]$ için $f(x) \leq 0$ ise dikdörtgenlerin alanları

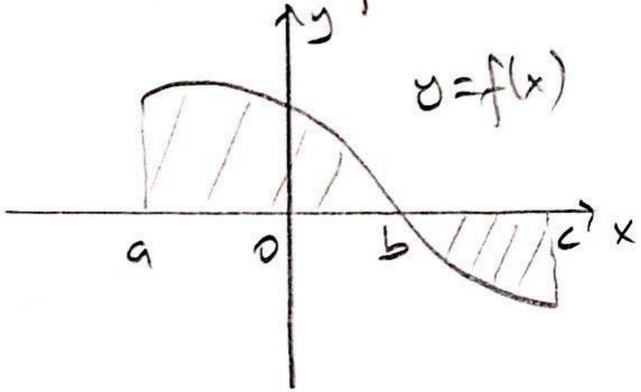
$-f(c_i)\Delta x_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ olacağından



$$A = -\int_a^b f(x)\,dx$$

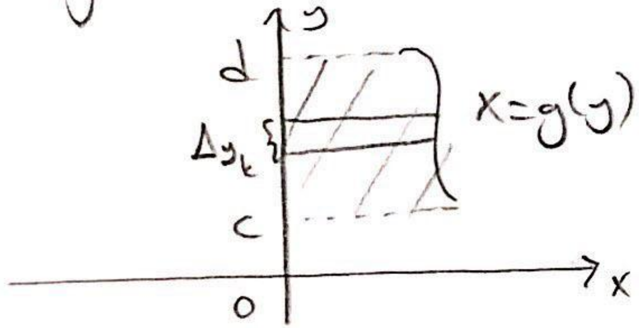
$y = f(x)$ olur.

3) f fonksiyonu $[a,b]$ aralığının bazı yerlerinde pozitif bazı yerlerinde negatif ise fonksiyonun pozitif veya negatif olduğu bölgelerdeki alanları ayrı ayrı hesaplanarak toplanır.



$$A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx$$

4) Benzer şekilde, $x=g(y)$ eğrisi, y ekseni, $y=c$ ve $y=d$ doğrularının sınırladığı bölgenin A alanı



$$A = \int_c^d g(y)\,dy$$

dır.

Sonuç

1) $y=f(x)$ eğrisi, x ekseni, $x=a$ ve $x=b$ doğruları arasında kalan bölgenin alanı

$$A=\int_a^b |f(x)|\,dx$$

dir.

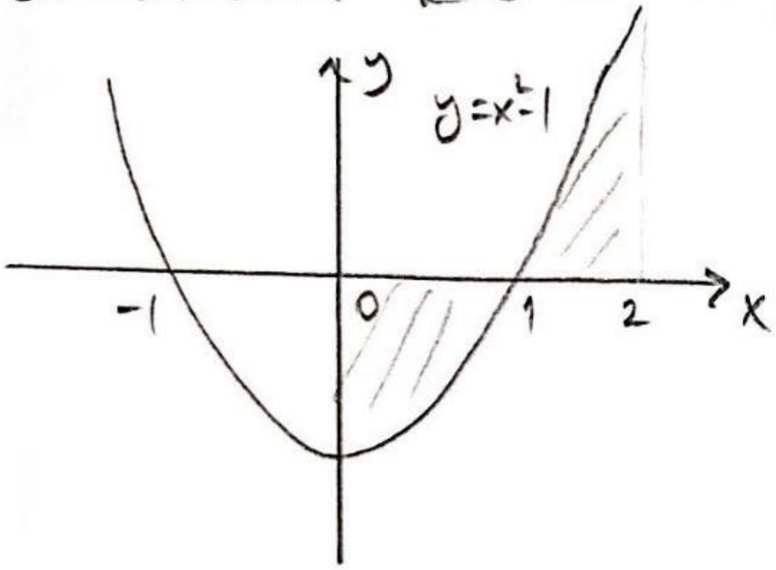
2) $x=g(y)$ eğrisi, y ekseni, $y=c$ ve $y=d$ doğruları arasında kalan bölgenin alanı

$$A=\int_c^d |g(y)|\,dy$$

dir.

Not: Dikdörtgenler hangi eksene dikse sınırlar ve integral o eksene göre alınmalıdır.

Örnek: $y = x^2 - 1$ eğrisi, x ekseni, $x=0$ ve $x=2$ doğruları arasında kalan bölgenin alanını hesaplayalım.



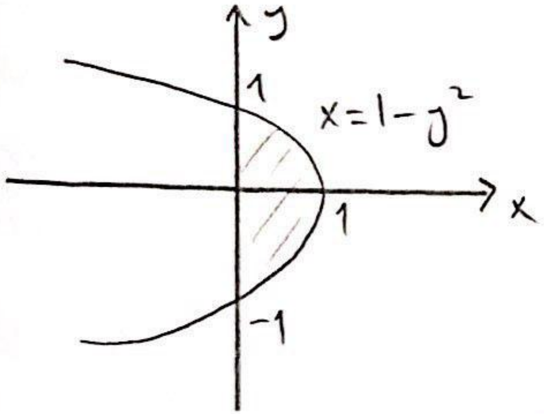
$$\text{Alan} = \int_0^2 |x^2-1|\,dx = \int_0^1 |x^2-1|\,dx + \int_1^2 |x^2-1|\,dx$$

$$= \int_0^1 \underbrace{(1-x^2)}_{\geq 0}\,dx + \int_1^2 \underbrace{(x^2-1)}_{\geq 0}\,dx$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 + \left(\frac{x^3}{3} - x\right)\Bigg|_1^2$$

$$= \cancel{1} - \frac{1}{3} + \frac{8}{3} \cancel{-2} - \frac{1}{3} \cancel{+1} = 2$$

Örnek: $x=1-y^2$ parabolü ile y ekseni arasında kalan bölgenin alanını bulalım:



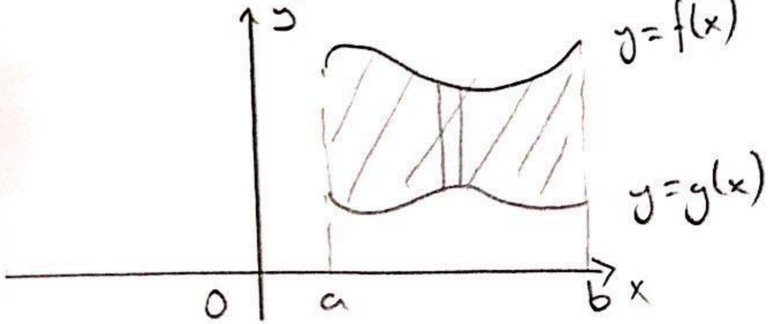
$$\int_{-1}^{1}(1-y^2)\,dy = \left(y-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{y=-1}^{y=1} = 1-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

İki eğrinin sınırladığı bölgenin alanı

$y=f(x)$, $y=g(x)$ eğrileri ile $x=a$ ve $x=b$ doğrularının sınırladığı alan A olsun. $f(x)>g(x)$ olmak üzere dikdörtgenlerin yükseklikleri $f(x_k)-g(x_k)$ olacağından

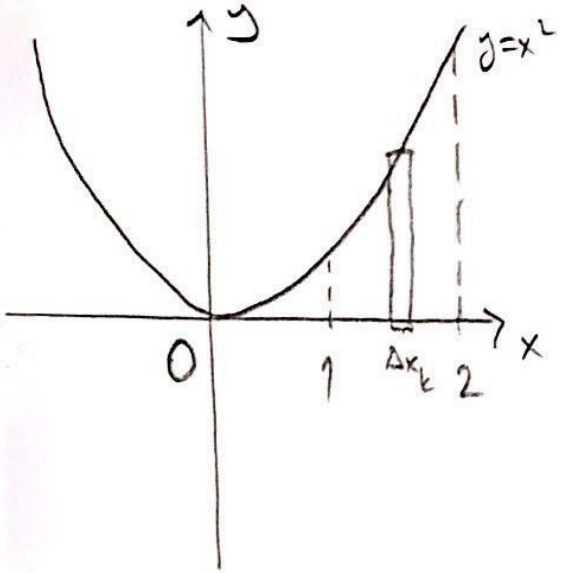
$$A=\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx$$

dir.



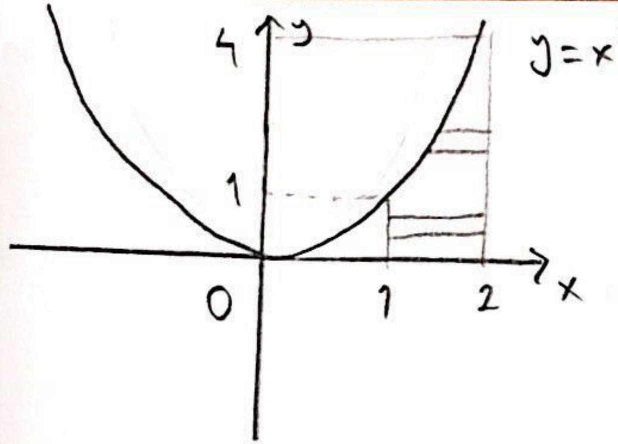
Not: İntegral bölgesinde düşey şeridin alt ve üst uçlarının (yatay şerit ile çalışılıyorsa sol ve sağ uçlarının) dayandığı eğriler aynı olmalıdır. Bu durumda istenen alan tek integral ile hesaplanabilir. Şeritlerin uçlarının dayandığı eğriler aynı değilse bölge bu özelliği gerçekleyecek şekilde alt bölgelere ayrılmalıdır.

Örnek: $y=x^2$, $x=1$, $x=2$, $y=0$ tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulalım:



Bölgeyi düşey şeritle tarayalım:

$$\int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$



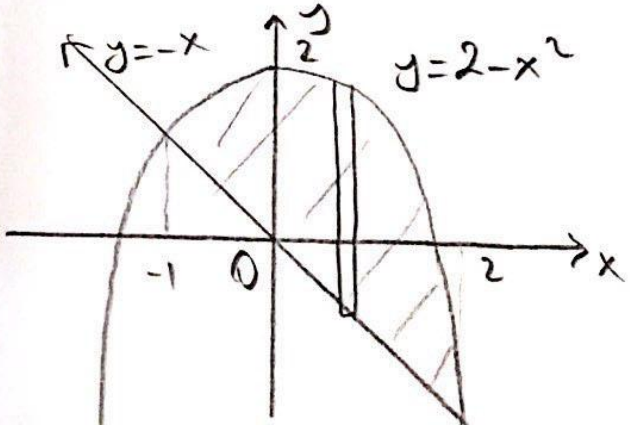
$$\int_0^1 (2-1)\,dy + \int_1^4 (2-\sqrt{y})\,dy = y\Big|_0^1 + \left(2y - \frac{2y^{3/2}}{3}\right)\Big|_1^4$$

$$= 1 + 8 - \frac{16}{3} - 2 + \frac{2}{3}$$

$$= \frac{7}{3}$$

Örnek: $y = 2 - x^2$ parabolü ve $y = -x$ doğrusu arasında kalan bölgenin alanını bulalım.

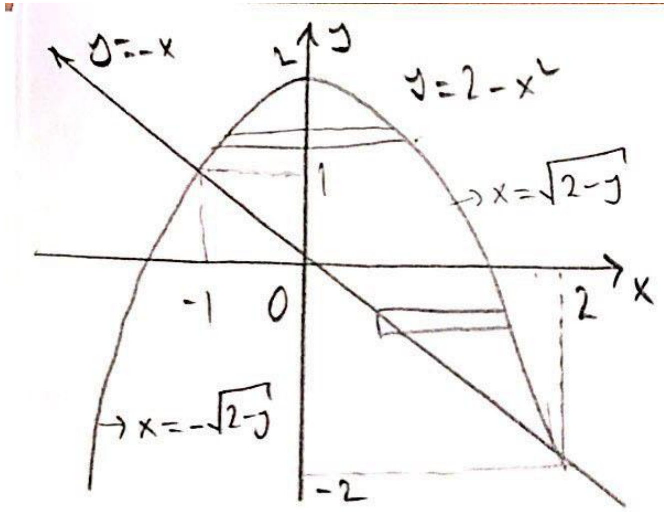
$2 - x^2 = -x \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow$ Parabol ile doğru $x = 2$ ve $x = -1$ 'de kesişiyor.



$$\int_{-1}^{2} (2 - x^2 - (-x))\,dx = \left(2x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{2}$$

$$= 4 - \frac{8}{3} + 2 - \left(-2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{9}{2}$$



Bölgeyi yatay şeritle tarayalım:

$$\int_{-2}^{1}\left(\sqrt{2-y}+y\right)dy+\int_{1}^{2}\left(\sqrt{2-y}-(-\sqrt{2-y})\right)dy$$

$$=\left(-\frac{2}{3}(2-y)^{3/2}+\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{-2}^{1}-\frac{4}{3}(2-y)^{3/2}\Big|_{1}^{2}=\frac{9}{2}$$